

# **Estruturas de Concreto**

ISSN 1519-4086

**Número 2**

## **A RESISTÊNCIA À TRAÇÃO E ENERGIA DE FRATURA DO CONCRETO**

**JOSÉ MILTON DE ARAÚJO**



**Editora DUNAS**

**Estruturas de Concreto** é uma publicação seriada com o objetivo de abordar diversos temas relativos ao projeto e à construção das estruturas de concreto simples, concreto armado e concreto protendido. Em cada número da série, são analisados aspectos específicos, visando manter atualizada a bibliografia nessa área da Engenharia Civil.

A publicação não se destina a servir como texto básico para um curso completo sobre estruturas de concreto. Por isso, não há nenhuma preocupação com a seqüência e com a profundidade com que os diversos assuntos são abordados. Porém, a publicação é sugerida como material didático complementar aos estudantes e aos profissionais interessados nessa área.

**Estruturas de Concreto**

**ISSN 1519-4086**

**Número 2**

**A RESISTÊNCIA À TRAÇÃO E ENERGIA  
DE FRATURA DO CONCRETO**

**JOSÉ MILTON DE ARAÚJO**

Professor titular da FURG

Doutor em Engenharia

**Editora DUNAS**

# ESTUTURAS DE CONCRETO

© Copyright Editora DUNAS

A663c Araújo, José Milton de

Estruturas de concreto : a resistência à tração e energia de fratura do concreto / José Milton de Araújo. - Rio Grande: Dunas, 2001, Número 2

## Bibliografia

1. Concreto. I. Título

CDU 624.012.45

CDD 624.1834

ISSN 1519-4086

Editora DUNAS

Rua Tiradentes, 105 - Cidade Nova

96211-080 RIO GRANDE - RS - Brasil

e-mail: [ed.dunas@mikrus.com.br](mailto:ed.dunas@mikrus.com.br)

---

Número 2, Julho de 2001

---

## SUMÁRIO

1. Ensaio para determinar a resistência à tração do concreto .....	1
2. Resistência à tração obtida nos diversos ensaios.....	3
3. Variação da resistência à tração com a idade .....	8
4. Resistência à tração do concreto sob carga dinâmica.....	10
5. Energia de fratura do concreto.....	11
6. Modelos de fratura para o concreto .....	16
7. Análise de uma barra sob tração pura.....	19
Referências Bibliográficas.....	26

## 1 - Ensaio para determinar a resistência à tração do concreto

A resistência à tração do concreto pode ser determinada em três ensaios diferentes: ensaio de tração axial, ensaio de compressão diametral ou ensaio de flexão de vigas. Normalmente, o termo *resistência à tração* que aparece nas normas de projeto refere-se à resistência à tração axial (tração direta),  $f_{ct}$ . Na fig. 1.1, indicam-se os esquemas dos três ensaios utilizados.

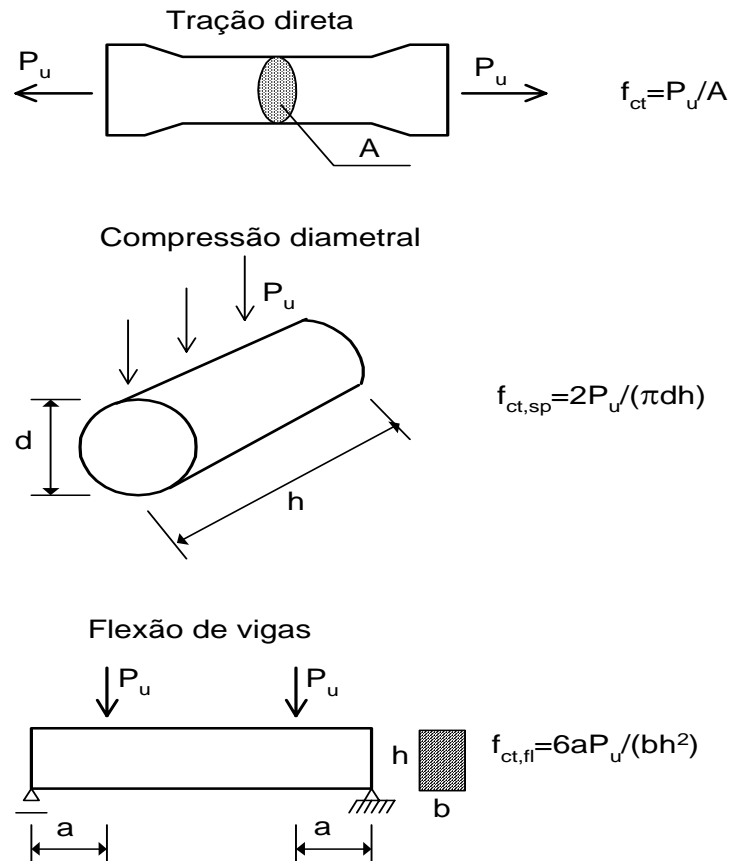


Fig. 1.1 - Ensaio para a determinação da resistência à tração do concreto

De maneira análoga à resistência à compressão, a resistência à tração do concreto apresenta uma significativa variabilidade em torno de um valor médio. Em geral, essa variabilidade é maior do que a verificada para a resistência à compressão. Assim, pode-se definir um valor médio,  $f_{ctm}$ , e um valor característico,  $f_{ctk}$ , de forma idêntica ao que foi feito para a resistência à compressão (ver o Número 1 desta Série).

O CEB/90<sup>(10)</sup> define dois valores característicos para a resistência à tração do concreto: valor característico inferior,  $f_{ctk,min}$ , correspondente ao quantil de 5%; valor característico

superior,  $f_{ctk,max}$ , correspondente ao quantil de 95%. Esses valores característicos podem ser estimados a partir da resistência característica à compressão com o emprego das equações

$$f_{ctk,min} = 0,95 \left( \frac{f_{ck}}{10} \right)^{2/3}, \text{ MPa} \quad (1.1)$$

$$f_{ctk,max} = 1,85 \left( \frac{f_{ck}}{10} \right)^{2/3}, \text{ MPa} \quad (1.2)$$

Os valores característicos são empregados no projeto no sentido desfavorável. Por exemplo, o valor característico inferior  $f_{ctk,min}$  é usado para determinar o valor limite da tensão de aderência. Neste caso, quanto menor for a tensão de aderência, maior será o comprimento de ancoragem<sup>(2)</sup> e, portanto,  $f_{ctk,min}$  é desfavorável.

Por outro lado, para o cálculo da área mínima da armadura de flexão, emprega-se o valor característico superior  $f_{ctk,max}$ . Neste caso, a armadura mínima é diretamente proporcional à resistência à tração do concreto<sup>(2)</sup> e  $f_{ctk,max}$  é desfavorável.

Nas verificações relativas aos estados limites de utilização, interessa é a resposta média da estrutura. Assim, para o cálculo da abertura das fissuras e para a avaliação das flechas de vigas<sup>(3)</sup>, emprega-se a resistência média à tração  $f_{ctm}$ .

Segundo o CEB/90, o valor médio da resistência à tração do concreto pode ser estimado através da expressão

$$f_{ctm} = 1,40 \left( \frac{f_{ck}}{10} \right)^{2/3}, \text{ MPa} \quad (1.3)$$

Comparando as equações (1.1), (1.2) e (1.3), pode-se escrever

$$f_{ctk,min} = (1 - 1,645V) f_{ctm} \quad ; \quad f_{ctk,max} = (1 + 1,645V) f_{ctm} \quad (1.4)$$

onde  $V \cong 0,20$  é o valor estimado para o coeficiente de variação da resistência à tração do concreto.

## 2 - Resistência à tração obtida nos diversos ensaios

A resistência à tração do concreto depende do tipo de ensaio realizado. Isto ocorre porque as tensões de tração se distribuem de maneira diferente para cada um dos ensaios descritos anteriormente.

Em virtude das dificuldades de realização do ensaio de tração direta, normalmente realiza-se o ensaio de compressão diametral (conhecido como ensaio brasileiro). De acordo com o CEB/90, a resistência média à tração axial,  $f_{ctm}$ , pode ser estimada a partir da resistência média obtida no ensaio de compressão diametral,  $f_{ct,sp}$ , através da relação

$$f_{ctm} = 0,9 f_{ct,sp} \quad (2.1)$$

Considerando as equações (1.3) e (2.1), pode-se escrever

$$f_{ct,sp} = 1,56 \left( \frac{f_{ck}}{10} \right)^{2/3}, \text{ MPa} \quad (2.2)$$

Ainda segundo o CEB/90, se a resistência à tração for determinada em um ensaio de flexão de vigas, a resistência média à tração axial pode ser obtida por

$$f_{ctm} = f_{ct,fl} \frac{1,5(h/100)^{0,7}}{1 + 1,5(h/100)^{0,7}} \quad (2.3)$$

onde  $f_{ct,fl}$  é a resistência média à tração na flexão e  $h > 50$  mm é a altura da viga.

A resistência à tração na flexão também é denominada de módulo de ruptura.

Para vigas de seção quadrada com  $h = 100$  mm e  $h = 150$  mm, resulta

$$f_{ctm} = 0,60 f_{ct,fl}, \text{ para } h = 100 \text{ mm} \quad (2.4)$$

$$f_{ctm} = 0,67 f_{ct,fl}, \text{ para } h = 150 \text{ mm} \quad (2.5)$$

Considerando as equações (1.3) e (2.5), pode-se escrever



$$f_{ct,fl} = 2,10 \left( \frac{f_{ck}}{10} \right)^{2/3}, \text{ MPa, para } h = 150 \text{ mm} \quad (2.6)$$

Na fig. 2.1, apresentam-se as relações entre a resistência à tração  $f_{ct}$ , obtida no ensaio de tração direta, e a resistência à tração  $f_{ct,sp}$ , obtida no ensaio de compressão diametral do cilindro de 15cm de diâmetro por 30cm de altura. Os pontos correspondem aos resultados experimentais apresentados na ref.[20]. A reta indicada na fig. 2.1 corresponde à equação (2.1).

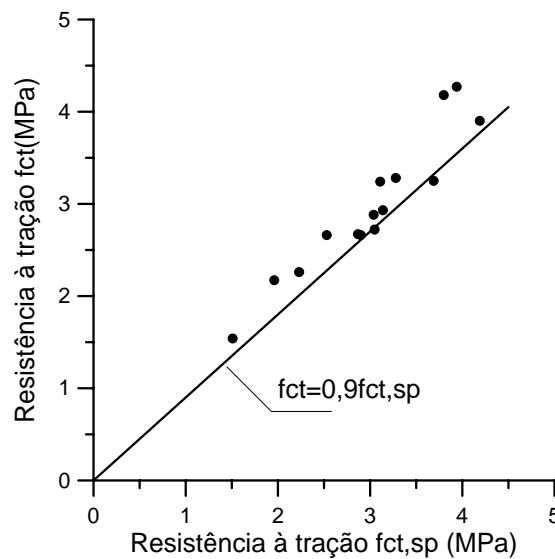


Fig. 2.1 - Relação entre a resistência à tração direta e a resistência à tração na compressão diametral (resultados experimentais extraídos da ref. 20)

Na fig. 2.2, apresentam-se as relações entre a resistência à tração direta  $f_{ct}$  e a resistência à tração na flexão  $f_{ct,fl}$ . Os pontos correspondem aos resultados experimentais apresentados na ref.[20]. Nos ensaios de flexão, foram empregadas vigas de 100x100x400mm. Logo, segundo o CEB/90, as duas resistências são correlacionadas de acordo com a equação (2.4), que também é representada na fig. 2.2.

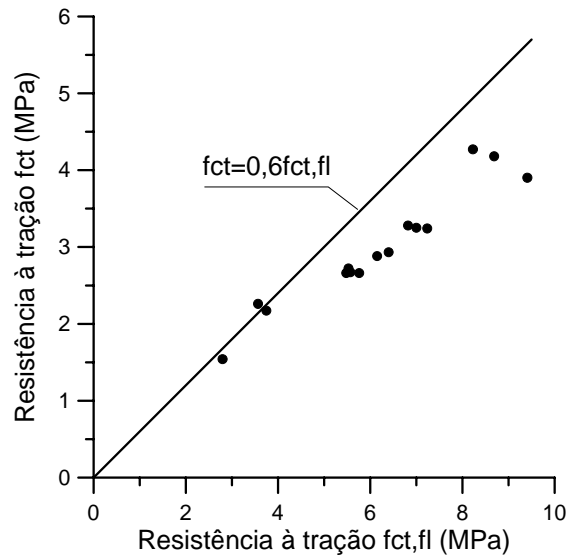


Fig. 2.2 - Relação entre a resistência à tração direta e a resistência à tração na flexão  
(resultados experimentais extraídos da ref. 20)

Na fig. 2.3, apresentam-se as relações entre a resistência à tração  $f_{ct,sp}$ , obtida no ensaio de compressão diametral, e a resistência à compressão simples,  $f_c$ . Os pontos correspondem aos resultados experimentais apresentados na ref.[13]. A curva correspondente à formulação do CEB/90 é dada pela equação (2.2), adotando-se  $f_c$  no lugar de  $f_{ck}$ .

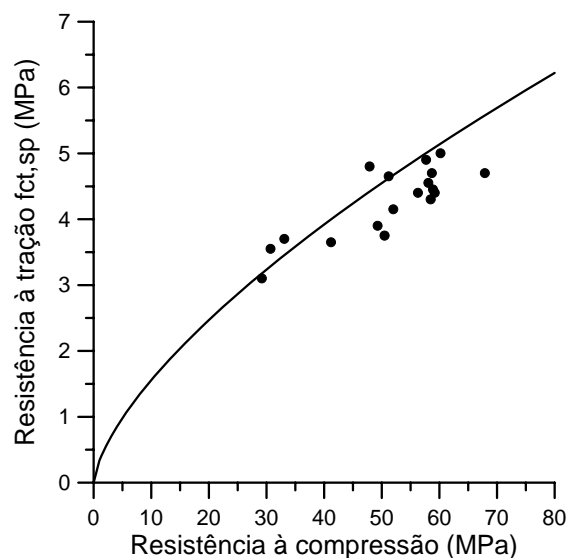


Fig. 2.3 - Relação entre a resistência à tração e a resistência à compressão simples  
(resultados experimentais extraídos da ref. 13)

Na fig. 2.4, compara-se a resistência à tração  $f_{ct,fl}$ , obtida no ensaio de flexão de vigas, com a resistência à compressão simples  $f_c$ . Os pontos correspondem aos resultados experimentais apresentados na ref.[13]. Nesses ensaios, foram empregadas vigas de 150mm x 150mm x 500mm. A curva correspondente à formulação do CEB/90 é dada na equação (2.6), adotando-se  $f_c$  no lugar de  $f_{ck}$ .

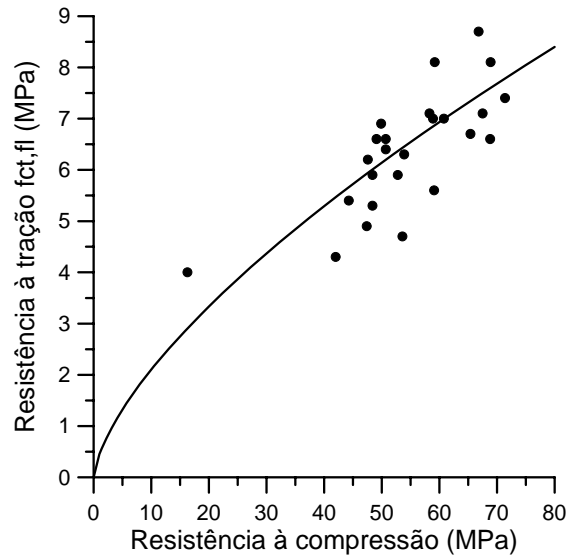


Fig. 2.4 - Relação entre o módulo de ruptura e a resistência à compressão simples (resultados experimentais extraídos da ref. 13)

Na fig. 2.5, apresenta-se a variação da resistência à tração  $f_{ct,sp}$ , obtida no ensaio de compressão diametral, com a resistência à compressão simples  $f_c$ . Os pontos correspondem aos resultados experimentais apresentados na ref.[14]. A curva correspondente à formulação do CEB/90 é dada pela equação (2.2), adotando-se  $f_c$  no lugar de  $f_{ck}$ .

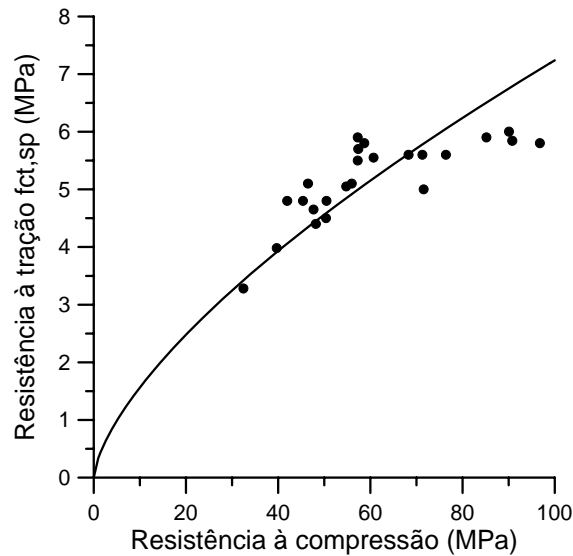


Fig. 2.5 - Relação entre a resistência à tração e a resistência à compressão simples  
(resultados experimentais extraídos da ref. 14)

Diversas relações entre a resistência à tração  $f_{ct,sp}$  e a resistência à compressão simples  $f_c$  têm sido sugeridas na bibliografia. Algumas dessas equações são comparadas na fig. 2.6.

Na fig. 2.6, a curva 1 corresponde à formulação do CEB/90, dada na forma

$$f_{ct,sp} = 1,56 \left( \frac{f_c}{10} \right)^{2/3}, \text{ MPa} \quad (2.7)$$

A curva 2, foi obtida a partir de vários ensaios realizados com concretos de barragens brasileiras, sendo dada por<sup>(12)</sup>

$$f_{ct,sp} = \frac{f_c^2}{0,1156f_c^2 + 5,878f_c + 9,277}, \text{ MPa} \quad (2.8)$$

A curva 3, proposta na ref.[8], é dada por

$$f_{ct,sp} = 0,54\sqrt{f_c}, \text{ MPa} \quad (2.9)$$

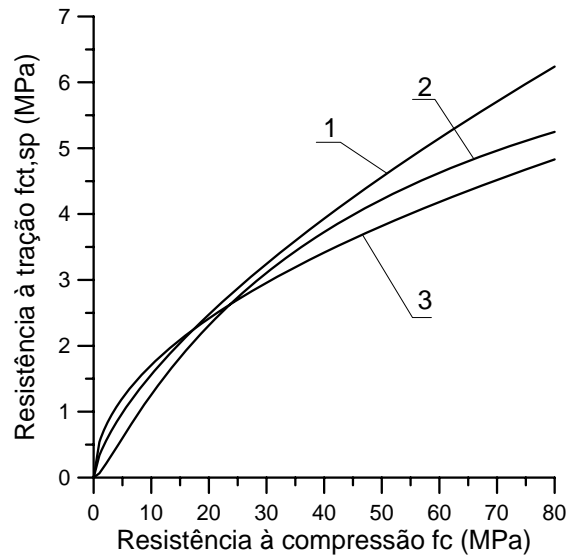


Fig. 2.6 - Relações entre a resistência à tração na compressão diametral e a resistência à compressão simples

Observa-se que as três curvas apresentam a mesma tendência e que os resultados obtidos são relativamente próximos até uma resistência à compressão da ordem de 40MPa.

### 3 - Variação da resistência à tração com a idade

A resistência média à tração axial do concreto,  $f_{ctm}(t)$ , em uma idade  $t$  dias, pode ser correlacionada com sua resistência à compressão  $f_{cm}(t)$ , escrevendo a equação (1.3) na forma

$$f_{ctm}(t) = 1,40 \left[ \frac{f_{cm}(t)}{10} \right]^{2/3}, \text{ MPa} \quad (3.1)$$

Segundo o CEB/90, a resistência média à compressão na idade  $t$  dias,  $f_{cm}(t)$ , é dada por

$$f_{cm}(t) = \beta_{cc}(t) f_{cm} \quad (3.2)$$

onde  $f_{cm}$  é a resistência média à compressão aos 28 dias de idade e  $\beta_{cc}(t)$  é a função de envelhecimento apresentada no Número 1 desta Série.

Substituindo a equação (3.2) em (3.1), resulta

$$f_{ctm}(t) = \beta_{ct}(t) f_{ctm} \quad (3.3)$$

onde  $f_{ctm}$  é a resistência média à tração axial aos 28 dias.

A função que representa o aumento da resistência à tração com a idade é dada por

$$\beta_{ct}(t) = [\beta_{cc}(t)]^{2/3} \quad (3.4)$$

sendo  $\beta_{cc}(t)$  a função que define o aumento da resistência à compressão com a idade.

A mesma função  $\beta_{ct}(t)$  pode ser usada para avaliar o aumento das resistências à tração na flexão e na compressão diametral, em virtude das relações lineares admitidas nas equações (2.1) e (2.3).

Na fig. 3.1, compara-se a variação teórica da resistência à tração, dada pela expressão (3.3), com resultados experimentais apresentados na ref.[20]. Nesses ensaios foi utilizado cimento Portland pozolânico. Portanto, o coeficiente que define o tipo de cimento é  $s = 0,38$ .

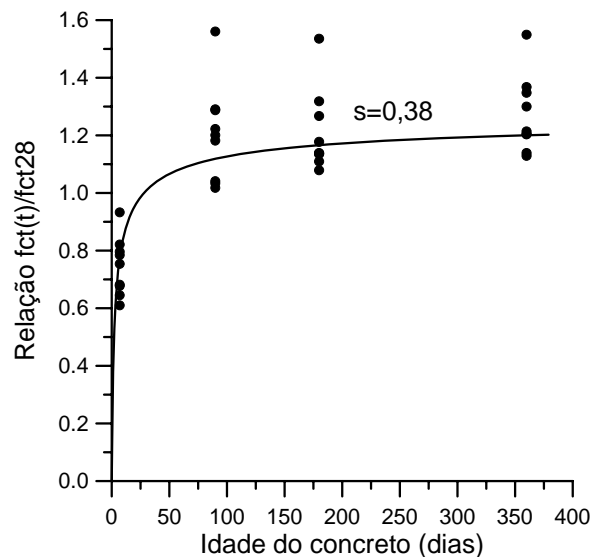


Fig. 3.1 - Variação da resistência à tração do concreto com a idade (resultados experimentais extraídos da ref. 20)

Para levar em conta o efeito da temperatura de cura na resistência à tração do concreto, adota-se a idade equivalente  $t_e$ , em vez da idade real (ver o Número 1 desta Série).

A resistência à tração do concreto depende da temperatura no momento da realização do ensaio. Segundo o CEB/90, para temperaturas no intervalo  $0^\circ\text{C} < T < 80^\circ\text{C}$ , a resistência à tração uniaxial  $f_{ct}$  e a resistência à tração na compressão diametral  $f_{ct,sp}$  não são significativamente afetadas pela temperatura no instante de realização do ensaio. A resistência à tração na flexão  $f_{ct,fl}(T)$  pode ser estimada como

$$f_{ct,fl}(T) = f_{ct,fl}(1,1 - 0,005T) \quad (3.5)$$

onde  $T^\circ\text{C}$  é a temperatura ambiente durante a realização do ensaio e  $f_{ct,fl}$  é a resistência à tração na flexão para temperatura de  $20^\circ\text{C}$ .

#### 4 - Resistência à tração do concreto sob carga dinâmica

Assim como ocorre com a resistência à compressão, a resistência à tração do concreto depende da taxa de tensão ou de deformação. De acordo com o CEB/90, a resistência à tração do concreto sob impacto,  $f_{ct,imp}$ , pode ser avaliada por

$$f_{ct,imp} / f_{ctm} = (\dot{\sigma}_{ct} / \dot{\sigma}_{cto})^\delta, \quad \text{para } \dot{\sigma}_{ct} \leq 10^6 \text{ MPa/s} \quad (4.1)$$

$$f_{ct,imp} / f_{ctm} = \lambda (\dot{\sigma}_{ct} / \dot{\sigma}_{cto})^{1/3}, \quad \text{para } \dot{\sigma}_{ct} > 10^6 \text{ MPa/s} \quad (4.2)$$

onde

$$\delta = \frac{1}{10 + 0,6f_{cm}} ; \log \lambda = 7\delta - 7/3 \quad (4.3)$$

Nessas expressões,  $f_{ctm}$  é a resistência média à tração, dada na equação (1.3), e  $f_{cm}$  é a resistência média à compressão simples, ambas referentes ao ensaio convencional com baixa

velocidade de carga. A taxa de tensão de referência é  $\dot{\sigma}_{cto} = 0,1 \text{ MPa/s}$  e a taxa de tensão de tração considerada é  $\dot{\sigma}_{ct}$ .

Se a taxa de deformação  $\dot{\epsilon}_{ct}$  for conhecida, a resistência à tração  $f_{ct,imp}$  é dada por

$$f_{ct,imp}/f_{ctm} = \left(\dot{\epsilon}_{ct}/\dot{\epsilon}_{cto}\right)^{1,016\delta}, \quad \text{para } \dot{\epsilon}_{ct} \leq 30 \text{ s}^{-1} \quad (4.4)$$

$$f_{ct,imp}/f_{ctm} = \beta \left(\dot{\epsilon}_{ct}/\dot{\epsilon}_{cto}\right)^{1/3}, \quad \text{para } \dot{\epsilon}_{ct} > 30 \text{ s}^{-1} \quad (4.5)$$

onde

$$\log \beta = 7,112\delta - 2,33 \quad (4.6)$$

Nessas expressões,  $\dot{\epsilon}_{cto} = 3 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ . O coeficiente  $\delta$  é dado na equação (4.3).

## 5 - Energia de fratura do concreto

Uma vez que a resistência à tração do concreto é pequena em relação à sua resistência à compressão, durante muito tempo a mesma foi desprezada nos procedimentos de projeto. Como alternativa a essa prática, é usual admitir-se um comportamento frágil em tração, conforme indicado na fig. 5.1.

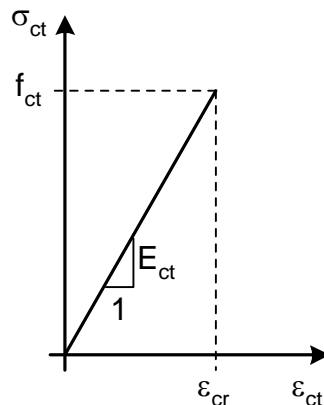


Fig. 5.1 - Diagrama tensão-deformação com ruptura brusca



Na fig. 5.1,  $f_{ct}$  é a resistência à tração,  $\varepsilon_{cr}$  é a deformação correspondente ao início da fissuração e  $E_{ct}$  é o módulo de deformação longitudinal do concreto em tração.

Os ensaios de tração realizados em prismas de concreto<sup>(15)</sup> indicam que o módulo de deformação longitudinal em tração,  $E_{ct}$ , é aproximadamente igual ao módulo em compressão,  $E_c$ .

A adoção do comportamento da fig. 5.1, entretanto, não é satisfatória para diversas aplicações como, por exemplo, a análise de fissuração em estruturas de concreto simples<sup>(23)</sup>. Para se efetuar uma análise rigorosa dessas estruturas, torna-se necessária a consideração da curva carga-deslocamento completa para o concreto em tração. Essa curva é obtida em ensaios de tração simples ou de flexão de vigas, onde os deslocamentos são controlados.

Diversos ensaios realizados por Cedolin et al.<sup>(9)</sup>, Gopalaratnan e Shah<sup>(15)</sup>, Zhen-Hai e Xiu-Qin<sup>(27)</sup>, dentre outros, indicam que a relação carga-deslocamento em tração é da forma apresentada na fig. 5.2.

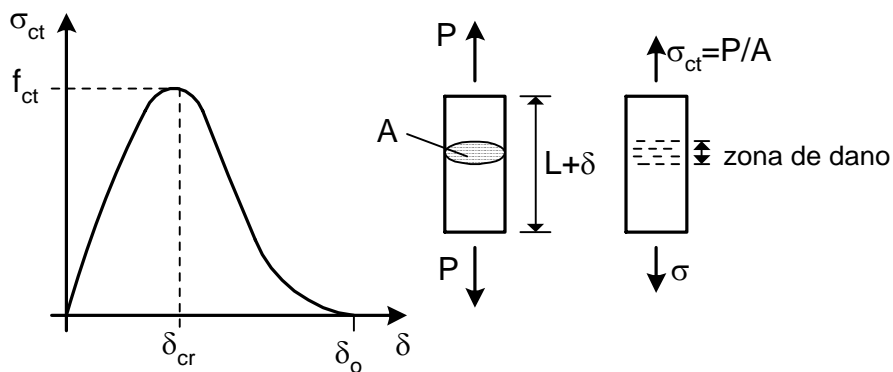


Fig. 5.2 - Relação tensão-deslocamento para o concreto em tração

Na fig. 5.2,  $P$  é a carga aplicada,  $A$  é a área da seção transversal do corpo de prova,  $\delta$  é o deslocamento e  $L$  é o comprimento sobre o qual os deslocamentos são medidos.

Quando a carga atinge o valor crítico,  $P_{cr} = f_{ct} A$ , inicia-se o processo de fissuração. As microfissuras se formam em uma zona mais fraca do material, a denominada zona do processo de fratura ou zona de dano. Com o aumento dos deslocamentos, mais microfissuras vão se formando e a carga diminui até que, quando  $\delta = \delta_o$ , ocorre uma macrofissura com a separação completa do corpo de prova<sup>(23)</sup>.

O alívio da tensão média (amolecimento) indicado na fig. 5.2 ocorre na zona de dano. A parte restante do corpo de prova permanece elástica e se retrai devido à redução da tensão. Assim, depois que inicia o desenvolvimento da zona de dano, as deformações não são uniformes ao longo do elemento<sup>(17)</sup>.

Neste estágio, o comportamento do material não pode ser descrito por uma curva tensão-deformação. Isto se deve à constatação experimental de que a relação tensão-deformação, após o surgimento da zona de fratura, é dependente do comprimento  $L$  sobre o qual se faz a medição. Dessa forma, o diagrama  $\sigma - \varepsilon$  após o pico de tensão não representa uma propriedade do material, como ocorre no trecho ascendente<sup>(15,27)</sup>.

Assim, a resposta do material deve ser representada por duas curvas, como indicado na fig. 5.3.

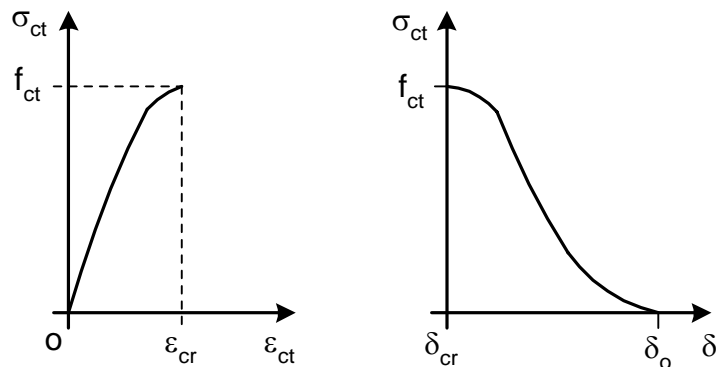


Fig. 5.3 - Representação dos trechos ascendente e descendente da resposta em tração

Conforme se indica na fig. 5.3, para o trecho ascendente pode-se empregar uma relação tensão-deformação nos termos da mecânica do contínuo. Após o surgimento da zona de dano, ocorre a quebra da continuidade e o que se tem é uma relação tensão-deslocamento.

Os resultados experimentais indicam que a não-linearidade do trecho ascendente do diagrama tensão-deformação é pequena<sup>(15)</sup>. Dessa forma, usualmente, essa parte é considerada linear.

Em vez da relação tensão-deslocamento, pode-se empregar uma relação tensão-abertura da fissura para a representação do trecho descendente. A obtenção da abertura  $w$  da fissura é indicada na fig. 5.4, para os casos em que o trecho ascendente é considerado linear e não-linear.

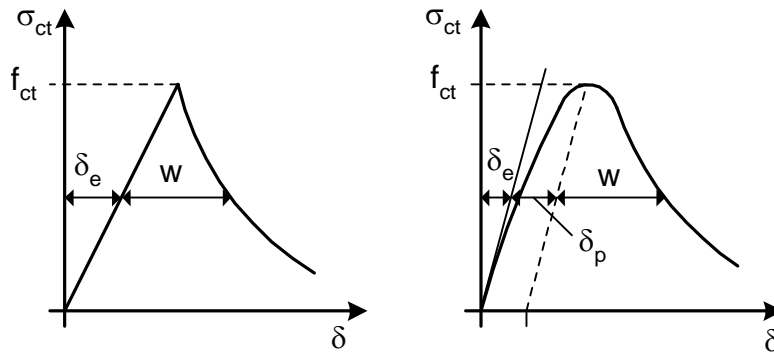


Fig. 5.4 - Determinação da abertura da fissura

No primeiro caso, a abertura da fissura é obtida pela diferença entre o deslocamento medido e a parcela elástica  $\delta_e$ . No segundo, deve-se ainda retirar o deslocamento  $\delta_p$  provocado pela não-linearidade.

Obtidas as aberturas da fissura para os vários níveis de tensão, o comportamento pós-fissuração do material é representado como na fig. 5.5.

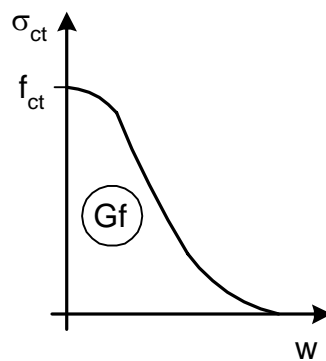


Fig. 5.5 - Relação tensão-abertura da fissura

A área  $G_f$  sob a curva  $\sigma_{ct} - w$  representa a energia de fratura específica. Essa é a energia necessária para que seja criada uma fissura completa de área unitária.

Diversos métodos de ensaio podem ser empregados para a determinação da energia de fratura. O método depende do modo de fratura que se deseja analisar.

Para o denominado modo I ou modo de abertura, pode-se adotar o ensaio de tração simples. Entretanto, um ensaio mais fácil de ser realizado é o de flexão de uma viga biapoiada. A viga deve possuir um entalhe na borda inferior da seção central sobre a qual é aplicada uma carga concentrada. O entalhe força a propagação de uma fissura e a energia de fratura pode ser calculada conforme as recomendações RILEM<sup>(22)</sup>.

No modo II ou modo de corte puro, uma viga semelhante à anterior é submetida a duas cargas aplicadas em faces opostas. Para o modo III pode-se empregar cilindros com entalhe circunferencial submetidos à torção, conforme apresentando na ref. [7].

Comparando a energia de fratura  $G_f^{II}$ , obtida no modo II, com a energia  $G_f^{III}$ , obtida no modo III, Bazant e Prat<sup>(7)</sup> verificaram que  $G_f^{II} \cong 9G_f^{III}$ , de onde concluíram que essas propriedades não são constantes, mas dependem da força normal ao longo da zona de dano.

Hillerborg<sup>(16)</sup> apresenta um estudo comparativo dos valores da energia de fratura obtidos em uma série de ensaios realizados em vários laboratórios. Em função dos resultados, verifica-se que a energia de fratura depende de uma série de fatores, como a composição do concreto, as condições de cura, idade, etc.. Nenhuma correlação foi encontrada, apesar do grande número de ensaios. Porém, é verificado que a energia de fratura aumenta com o tamanho do agregado graúdo.

Segundo o CEB/90<sup>(10)</sup>, na ausência de dados experimentais, a energia de fratura  $G_f$  no modo I pode ser estimada como

$$G_f = G_{fo} \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{0,7} \quad (5.1)$$

onde  $f_{cm}$  é a resistência média à compressão do concreto em MPa e  $G_{fo}$  é o valor básico da energia de fratura, dado na tabela 5.1 em função do diâmetro máximo do agregado  $d_{max}$ .

Tabela 5.1 - Valores básicos da energia de fratura  $G_{fo}$  (Nmm/mm<sup>2</sup>)

$d_{max}$ (mm)	$G_{fo}$ (Nmm/mm <sup>2</sup> )
8	0,025
16	0,030
32	0,058

Os ensaios de tração sob carregamento cíclico<sup>(15)</sup> revelam o comportamento da fig. 5.6.

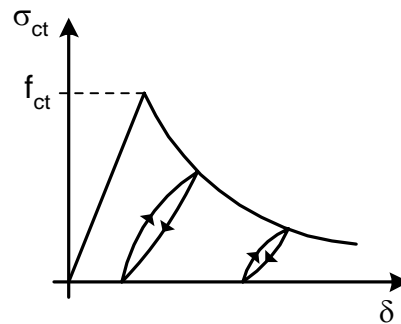


Fig. 5.6 - Comportamento sob carregamento cíclico

Conforme está indicado na fig. 5.6, verifica-se que a envoltória obtida no ensaio estático é preservada.

Diversas formulações têm sido desenvolvidas para a consideração do comportamento apresentado. Algumas dessas formulações são descritas na seção seguinte.

## 6 - Modelos de fratura para o concreto

Os modelos empregados para a análise de fissuração em estruturas de concreto são genericamente denominados de modelos de fratura não-linear. Duas formulações distintas têm sido empregadas: a formulação de fissura discreta e a formulação de fissura distribuída.

Nas primeiras, relações tensões-deformações são adotadas até o surgimento da primeira microfissura e relações tensões-deslocamentos, ou tensões-abertura das fissuras, são utilizadas em seguida.

Nos modelos de fissuração distribuída, o material fissurado é associado a um meio contínuo equivalente. Dessa forma, pode-se empregar relações tensões-deformações médias durante toda a análise. Em geral, admite-se que a fissura se inicia quando a tensão principal máxima atinge a resistência à tração do concreto.

O modelo de fissura discreta foi empregado por Hillerborg et al.<sup>(18)</sup> para analisar uma viga em flexão pura. Adotando uma relação linear entre a tensão e a abertura da fissura e empregando o método dos elementos finitos, foi possível obter a resposta da estrutura até a fratura completa. Aplicações do modelo de fissuração discreta para a análise de barragens de concreto foram feitas por Skrikerud e Bachmann<sup>(24)</sup>.

Os modelos de fissura discreta, entretanto, apresentam uma série de inconvenientes. Em primeiro lugar, o caminho de propagação da fissura deve ser estabelecido *a priori*. Em situações

gerais, esse caminho não é conhecido e diversas localizações possíveis devem ser testadas, o que leva a um grande esforço computacional.

Aliado a esse fato, os modelos de fissura discreta exigem algoritmos especiais para a redefinição da malha de elementos finitos sem que a banda da matriz de rigidez seja perdida<sup>(19)</sup>. Além disso, é muito difícil considerar a situação em que as direções das tensões principais na zona de fratura giram durante o processo de propagação. Este caso ocorre, por exemplo, quando primeiro uma tensão normal de tração vertical produz uma fissuração parcial e a falha é subsequente causada por uma corte horizontal<sup>(6)</sup>.

Em vista disso, as pesquisas recentes têm buscado o desenvolvimento de modelos de fissuração distribuída. Entretanto, a simples utilização de um diagrama tensão-deformação incluindo o amolecimento leva a resultados que não são objetivos em relação à malha de elementos finitos. Na verdade, os resultados são fortemente afetados pela escolha dos tamanhos dos elementos<sup>(5)</sup>.

Tem sido postulado que, para tornar os resultados insensíveis à escolha da malha, é necessário que o modelo contínuo equivalente reproduza a energia necessária para o desenvolvimento completo da fratura. Isto é conseguido pela introdução de uma medida do comprimento da zona de fratura, o denominado comprimento característico. Diversos modelos dessa natureza têm sido propostos por Bazant e Oh<sup>(6)</sup>, Nilsson e Oldenburg<sup>(21)</sup>, Yamaguchi e Chen<sup>(26)</sup>, dentre outros.

Esses modelos, entretanto, exigem que o tamanho do elemento finito seja pequeno para que o amolecimento seja possível. Para estruturas de grandes dimensões, como as barragens de concreto, essa limitação quanto ao tamanho do elemento é proibitiva.

Bazant e Oh<sup>(6)</sup>, por exemplo, adotam o modelo indicado na fig. 6.1.

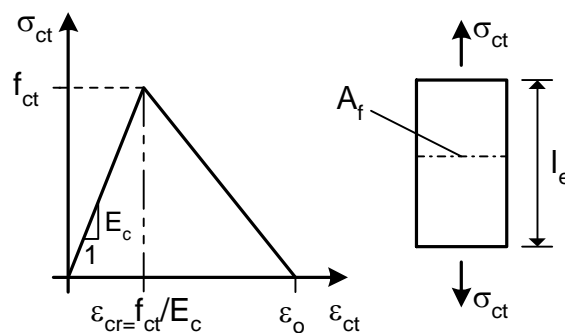


Fig. 6.1 - Modelo de Bazant e Oh

Na fig. 6.1, indicam-se o corpo de volume  $V$  com uma fissura de área  $A_f$  e o diagrama tensão-deformação do modelo contínuo equivalente. A energia de deformação no modelo contínuo é dada por

$$V \int_0^{\varepsilon_o} \sigma_{ct} d\varepsilon_{ct} = \frac{V f_{ct} \varepsilon_o}{2} \quad (6.1)$$

Igualando a energia de deformação à energia de fratura total,  $A_f G_f$ , resulta

$$\varepsilon_o = \frac{2G_f}{f_{ct}} \frac{A_f}{V} \quad (6.2)$$

e definindo  $l_e = V / A_f$  como sendo o comprimento característico, chega-se a

$$\varepsilon_o = \frac{2G_f}{f_{ct} l_e} \quad (6.3)$$

A condição necessária para a existência do trecho descendente do diagrama tensão-deformação é que  $\varepsilon_o > \varepsilon_{cr}$ . Impondo essa restrição na equação (6.3), resulta

$$l_e < l_{cr} = \frac{2E_c G_f}{f_{ct}^2} \quad (6.4)$$

onde  $l_{cr}$  é o comprimento crítico.

A equação (6.4) representa uma restrição quanto ao tamanho dos elementos a serem empregados na solução com o método dos elementos finitos. Para grandes estruturas, essa limitação é impraticável. Nestes casos, Bazant e Oh sugerem a adoção de um diagrama tensão-deformação com fratura brusca ( $\varepsilon_o = \varepsilon_{cr}$ ) e com uma resistência reduzida.

Igualando  $\varepsilon_o$  a  $\varepsilon_{cr} = f_{ct} / E_c$ , chega-se a

$$f_{cte} = \left( \frac{2E_c G_f}{l_e} \right)^{1/2} \quad (6.5)$$

que é a expressão da resistência à tração equivalente  $f_{cte}$ .

A expressão (6.5) tem sido empregada em vários estudos de fissuração em barragens de concreto na expectativa de que, trabalhando com essa resistência equivalente, os resultados sejam independentes da malha de elementos finitos<sup>(11,25)</sup>. Na seção seguinte será mostrado que, na verdade, a expressão (6.5) também leva a resultados dependentes da escolha da malha de elementos finitos.

## 7 - Análise de uma barra sob tração pura

Para demonstrar a falta de objetividade do critério de resistência convencional, bem como do critério proposto por Bazant e Oh (equação (6.5)), é analisada a barra da fig. 7.1.

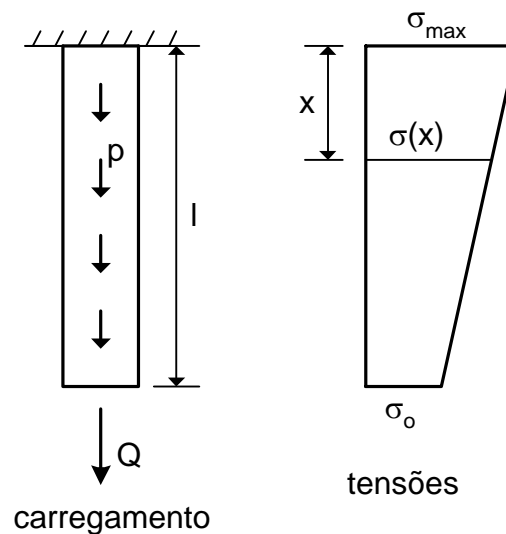


Fig. 7.1 - Carregamento e tensões na barra

A barra tem um comprimento  $l$  e é submetida a uma força concentrada  $Q$  na extremidade e a uma carga  $p$  uniformemente distribuída ao longo do seu eixo.

A tensão normal  $\sigma(x)$  em uma seção genérica é dada por



$$\sigma(x) = \sigma_o + \alpha \left(1 - \frac{x}{l}\right) f_{ct} \quad (7.1)$$

onde  $\sigma_o = Q/A$  e  $\alpha = pl/(Af_{ct})$ , sendo  $A$  a área da seção transversal da barra e  $f_{ct}$  a resistência à tração do material.

O parâmetro  $\alpha$  pode ser variado para introduzir diferentes gradientes de tensões na barra.

A tensão máxima é dada por

$$\sigma_{max} = \sigma_o + \alpha f_{ct} \quad (7.2)$$

e a ruptura da barra ocorrerá quando  $\sigma_{max} = f_{ct}$ , de onde se conclui que

$$\sigma_{ou} = (1 - \alpha) f_{ct} \quad (7.3)$$

é o valor exato da máxima tensão que se pode aplicar na extremidade da barra para um dado valor do parâmetro  $\alpha$ .

Empregando o método dos elementos finitos, a barra é discretizada em  $n$  elementos de comprimento  $h$ , conforme está indicado na fig. 7.2.

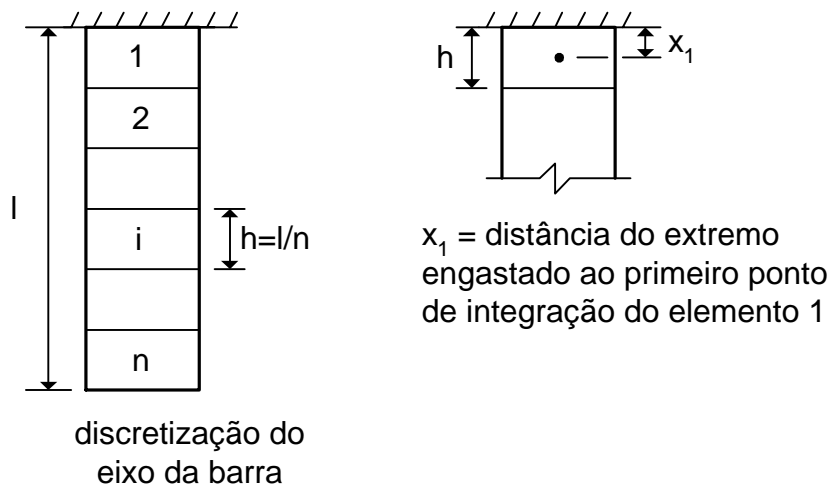


Fig. 7.2 - Discretização da barra em  $n$  elementos finitos

A carga de ruptura  $Q$  (ou a tensão  $\sigma_o$ ) pode ser obtida empregando-se um procedimento incremental. Em cada etapa de carga são calculadas as tensões nos pontos de integração. Quando a tensão atingir a resistência à tração do material, tem-se determinada a carga de ruptura (ou a tensão de ruptura  $\sigma_o$ ).

Em virtude do gradiente de tensões, a fissuração será detectada, primeiramente, no elemento 1 e no ponto de integração mais próximo do engaste (fig. 7.2). A coordenada  $x_1$  desse ponto é dada por

$$x_1 = Rh \quad (7.4)$$

onde  $R$  depende do número de pontos de integração adotado.

Empregando a regra de integração numérica de Gauss-Legendre, tem-se que

$$R = 1/2 \quad , \text{ adotando-se 1 ponto de integração;} \quad (7.5)$$

$$R = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad , \text{ adotando-se 2 pontos de integração.}$$

Introduzindo (7.4) em (7.1) e lembrando que  $h = l/n$ , pode-se obter a tensão  $\sigma_1$  no ponto de integração, na forma

$$\sigma_1 = \sigma_o + \alpha(1 - R/n)f_{ct} \quad (7.6)$$

A fissuração, com a conseqüente ruptura da barra, ocorre quando  $\sigma_1$  atinge um valor último de referência. No critério de resistência convencional, essa tensão última é a própria resistência à tração do material e no critério de Bazant e Oh é a resistência à tração equivalente, dada na equação (6.5).

Igualando  $\sigma_1$  a  $f_{ct}$ , pode-se obter a tensão de ruína  $\sigma_o$  e considerando a equação (7.3) chega-se a

$$\frac{\sigma_o}{\sigma_{ou}} = 1 + \frac{\alpha R}{n(1 - \alpha)} \quad (7.7)$$

que é a relação entre a tensão de ruptura obtida com o critério de resistência convencional e a tensão de ruptura exata.

Da equação (7.7), verifica-se que o critério de resistência convencional fornece a solução exata se o gradiente de tensões é nulo ( $\alpha = 0$ ), independentemente do número  $n$  de elementos. Se o gradiente de tensões não é nulo, esse critério fornece um valor superior para a tensão de ruptura, o qual converge para a solução exata com o refinamento da malha.

Para empregar o critério de Bazant e Oh (equação (6.5)), é necessário definir o comprimento característico  $l_e$ . Isto é feito na fig. 7.3, conforme se considere 1 ou 2 pontos de integração por elemento.

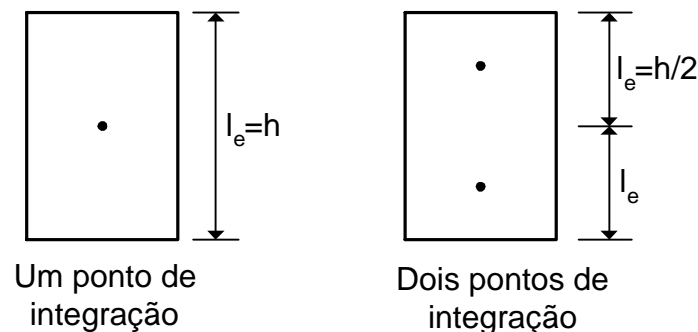


Fig. 7.3 - Determinação do comprimento característico

Com as definições dadas na fig. 7.3, a equação (6.5) pode ser escrita na forma

$$f_{cte} = \left( \frac{2E_c G_f S}{h} \right)^{1/2} \quad (7.8)$$

onde  $S$  é o número de pontos de integração adotado.

Definindo  $K = \frac{2E_c G_f}{l f_{ct}^2}$  e lembrando que  $l = nh$ , resulta

$$f_{cte} = (KnS)^{1/2} f_{ct} \leq f_{ct} \quad (7.9)$$

que é a expressão da resistência à tração equivalente do modelo de Bazant e Oh.

Igualando a tensão  $\sigma_1$  no ponto de integração, dada na equação (7.6), à resistência equivalente  $f_{cte}$ , obtém-se a tensão de ruína  $\sigma_o$ . Considerando a equação (7.3), chega-se a

$$\frac{\sigma_o}{\sigma_{ou}} = \frac{(KnS)^{1/2} - \alpha(1 - R/n)}{1 - \alpha} \quad (7.10)$$

que é a relação entre a tensão de ruptura obtida com a resistência à tração equivalente e a tensão de ruptura exata.

Observa-se, então, que esse critério também é dependente da malha, mesmo no caso em que o gradiente de tensões é nulo.

Das equações (7.7) e (7.10), conclui-se que tanto o critério de resistência convencional, quanto o critério de Bazant e Oh, dependem da malha, do número de pontos de integração e do gradiente de tensões.

Na fig. 7.4, são apresentadas as relações (7.7) e (7.10) para o caso em que  $K = 0,05$  e  $S = 1$  (1 ponto de integração). O número máximo de elementos para a utilização do critério de Bazant e Oh é obtido da equação (7.9) e, para este exemplo, é igual a 20. Com um maior refinamento da malha, deve-se considerar o amolecimento e a equação (6.5) não é aplicável.

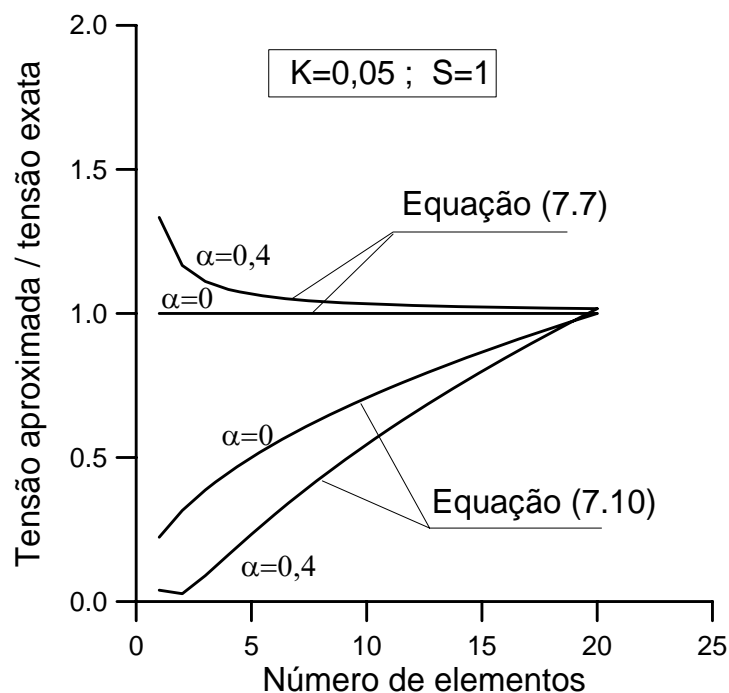
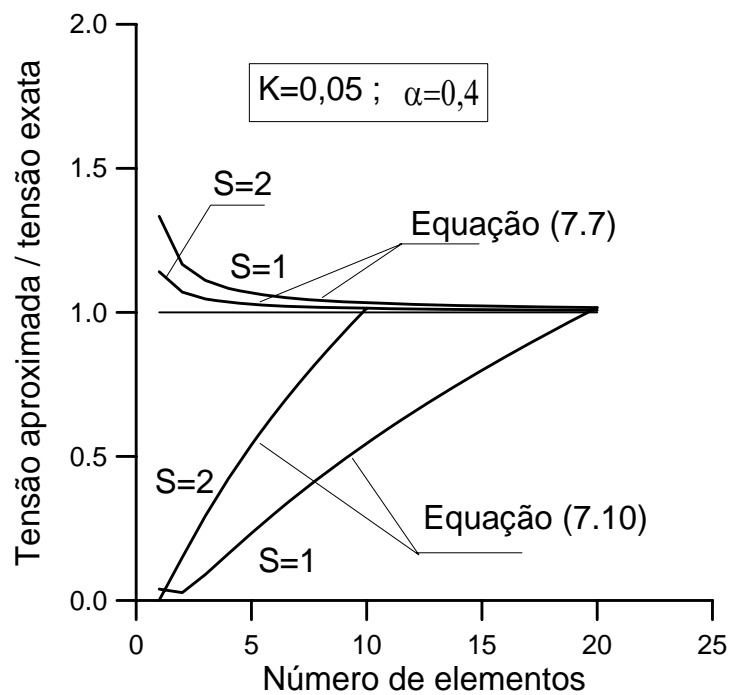
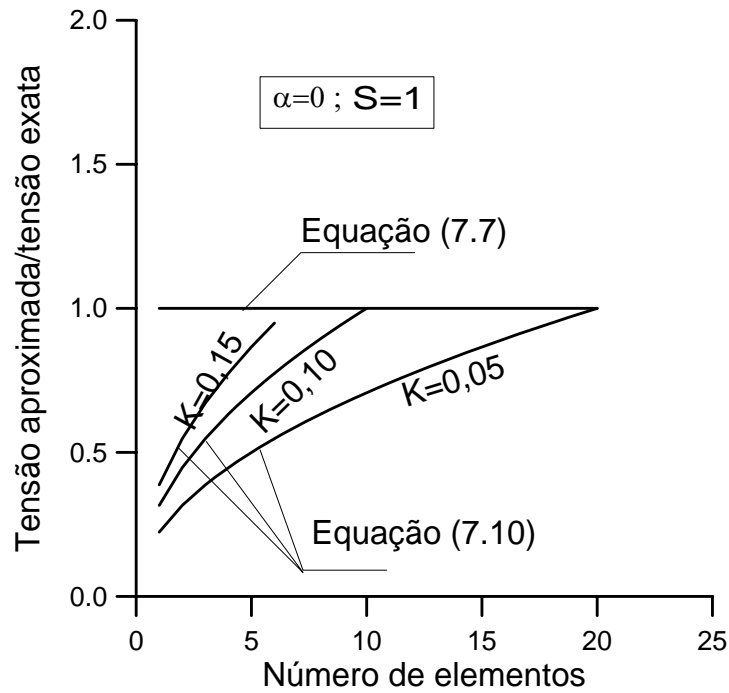


Fig. 7.4 - Influência do gradiente de tensões

Na fig. 7.5, apresentam-se os resultados obtidos com  $\alpha = 0$  e  $S = 1$ . Neste caso, o critério de resistência convencional é independente da malha, enquanto que o critério de Bazant e Oh é influenciado pelo parâmetro  $K$ . Na fig. 7.6, indicam-se os resultados obtidos considerando-se 1 e 2 pontos de integração.



Dos exemplos anteriores conclui-se que, para o estudo de fissuração em estruturas de concreto com o emprego do método dos elementos finitos, é de fundamental importância a adoção de um critério de fissuração independente da malha. Os critérios de fissuração apresentados são dependentes da malha e não são apropriados para a análise de estruturas de grandes dimensões como, por exemplo, as barragens de concreto simples.

Um critério de fissuração que leva a resultados independentes da malha de elementos finitos deve considerar os gradientes de tensões, como os critérios propostos pelo Autor<sup>(1,4)</sup>. No critério apresentado na ref.[4], a resistência à tração equivalente é determinada a partir do conhecimento da energia de deformação específica em cada ponto de integração dos elementos finitos. No critério da ref.[1], a resistência à tração equivalente é obtida a partir de um coeficiente de risco de fissuração, o qual é avaliado nos pontos de integração e nos nós dos elementos finitos. Ambos os critérios se mostraram independentes da malha de elementos finitos, como está demonstrado nas referências [1,4].

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

1. Araújo, J. M. - *Análise de barragens de gravidade de concreto considerando a fase construtiva e a interação dinâmica barragem-reservatório-fundação*. Tese de doutorado, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 1995.
2. Araújo, J. M. - *Curso de Concreto Armado, vol. 1*, Editora Dunas, Rio Grande, 1997.
3. Araújo, J. M. - *Curso de Concreto Armado, vol. 2*, Editora Dunas, Rio Grande, 1998.
4. Araújo, J. M.; Awruch, A. M. - *An objective cracking criterion for the analysis of concrete dams*. Computers and Structures, v.59, No.4, p.751-756, 1996.
5. Bazant, Z. P. - *Mechanics of distributed cracking*. Applied Mechanics Review, v. 39, n.5, p.675-705, 1986.
6. Bazant, Z. P.; Oh, B. H. - *Crack band theory for fracture of concrete*. Matériaux et Constructions, v.16, n.93, p.155-177, 1983.
7. Bazant, Z. P.; Prat, P. C. - *Measurement of mode III fracture energy of concrete*. Nuclear Engineering and Design, v.106, p.1-8, 1988.
8. Carrasquillo, R. L.; Nilson, A. H.; Slate, F. O. - *Properties of high strength concrete subject to short-term loads*. ACI Journal, No.78-14, p.171-178, May-June, 1981.
9. Cedolin, L.; Dei Poli, S.; Iori, I. - *Tensile behavior of concrete*. Journal of Engineering Mechanics, v.113, n.3, p.431-449, 1987.
10. Comité Euro-International du Béton. *CEB-FIP Model Code 1990*. Lausanne, 1993.
11. El-Aidi, B.; Hall, J. F. - *Non-linear earthquake response of concrete gravity dams, Part I: Modelling*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v.18, p.837-851, 1989.
12. Equipe de FURNAS, Laboratório de Concreto. *Concretos - Ensaios e Propriedades*. Editor: Walton Pacelli de Andrade. São Paulo, PINI, 1997.
13. Ferrari, A. A.; Flor, J. M.; Calixto, J. M. - *Propriedades mecânicas do concreto de alto desempenho fabricado com diversos materiais*. International Congress on High-Performance Concrete, and Performance and Quality of Concrete Structures. Anais, p.15-26, Florianópolis, 1996.
14. Gomes, P. C. C.; Shehata, L. C. D.; Almeida, I. R. - *Resistência à tração e módulo de elasticidade de concretos de alta resistência*. International Congress on High-Performance Concrete, and Performance and Quality of Concrete Structures. Anais, p.27-38, Florianópolis, 1996.
15. Gopalaratnam, V. S.; Shah, S. P. - *Softening response of plain concrete in direct tension*. ACI Journal, p.310-323, May-June, 1985.
16. Hillerborg, A. - *Results of three comparative test series for determining the fracture energy  $G_f$  of concrete*. Matériaux et Constructions, v.18, n.107, p.407-413, 1985.
17. Hillerborg, A. - *The teoretical basis of a method to determine the fracture energy  $G_f$  of concrete*. Matériaux et Constructions, v.18, n.106, p.291-296, 1985.
18. Hillerborg, A.; Modéer, M.; Petersson, P. E. - *Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements*. Cement and Concrete Research, v.6, n.6, p.773-781, 1976.

19. Ingraffea, A. R.; Bittencourt, T. N.; Sousa, J. L. A. O. - *Automatic fracture propagation for 2D finite element models*. XI Congresso Ibero Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Anais, p.957-962, Rio de Janeiro, out., 1990.
20. Komlos, K. - *Comments on the long-term tensile strength of plain concrete*. Magazine of Concrete Research, Vol. 22, No. 73, p.232-238, Dec., 1970.
21. Nilsson, L. G.; Oldenburg, M. - *On the numerical simulation of tensile fracture*. Finite Element Methods for Nonlinear Problems, p.103-117, Edited by P. G. Bergan, K. J. Bathe and W. Wunderlich, Springer-Verlag, 1986.
22. RILEM - *Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend tests on notched beams*. Matériaux et Constructions, v.18, n.106, p.285-290, 1985.
23. RILEM Technical Committee 90 FMA - *Fracture Mechanics of Concrete Structures: From theory to applications*. Chapman and Hall, 1989.
24. Skrikerud, P. E.; Bachmann, H. - *Discrete crack modelling for dynamically loaded, unreinforced concrete structures*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v.14, p.297-315, 1986.
25. Vargas-Loli, L. M.; Fenves, G. L. - *Effects of concrete cracking on the earthquake response of gravity dams*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v.18, p.575-592, 1989.
26. Yamaguchi, E.; Chen, W. F. - *Cracking model for finite element analysis of concrete materials*. Journal of Engineering Mechanics, v.116, n.6, p.1242-1260, June, 1990.
27. Zhen-Hai, G.; Xiu-Qin, Z. - *Investigation of complete stress-deformation curves for concrete in tension*. ACI Materials Journal, p.278-285, July-Aug., 1987.